力学III
工業力学演習
解析力学

4週目

立命館大学　機械システム系　2008年度　後期

先週のおさらい

- 運動エネルギーの概要
- 剛体の運動エネルギーの導出
- 演習

エネルギー保存則

系に保存力だけが働く場合、

系全体のエネルギーは

時間が経過しても変化しない

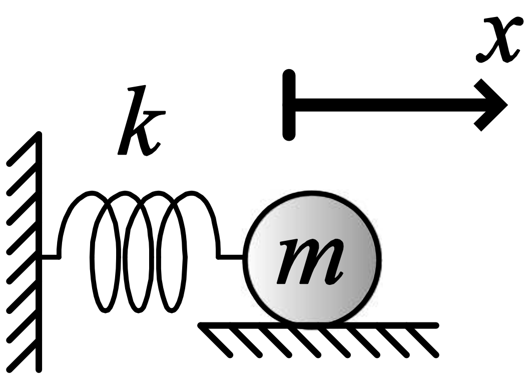
エネルギー保存則の例

運動エネルギー

$$K = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$$

ポテンシャルエネルギー

$$U = \frac{1}{2} kx^2$$



全エネルギー

$$V = K + U$$

運動方程式

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

エネルギーの時間変化

$$\dot{V} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2\right)$$

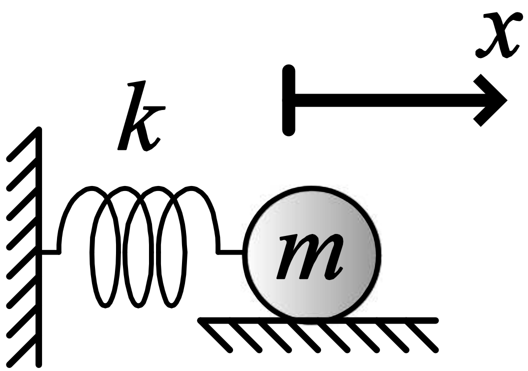
エネルギー保存則の例

運動エネルギー

$$K = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$$

ポテンシャルエネルギー

$$U = \frac{1}{2} kx^2$$



全エネルギー

$$V = K + U$$

運動方程式

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

エネルギーの時間変化

$$\dot{V} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2\right) = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x}$$

$$= \dot{x}\left(m\ddot{x} + kx\right) = 0$$

演習

振り子運動に関するエネルギー保存則を導出せよ

運動エネルギー

$$K = \frac{1}{2}m\left(r\dot{\theta}\right)^2$$

ポテンシャルエネルギー

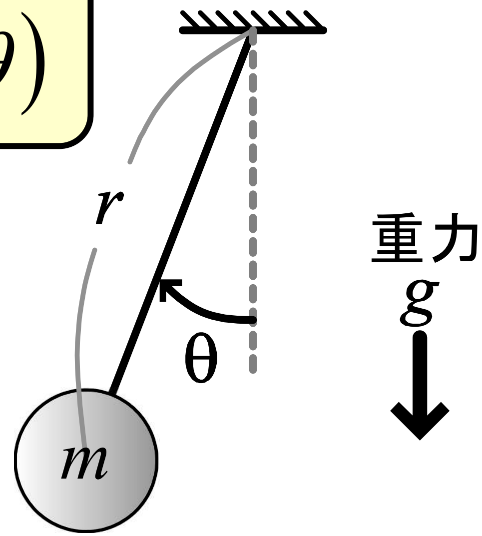
$$U = mg\left(r - r\cos\theta\right)$$

全エネルギー

$$V = K + U$$

運動方程式

？



エネルギーの時間変化

？

解答

運動エネルギー

$$K=\frac{1}{2}m\left(r\dot{\theta}\right)^2$$

ポテンシャルエネルギー

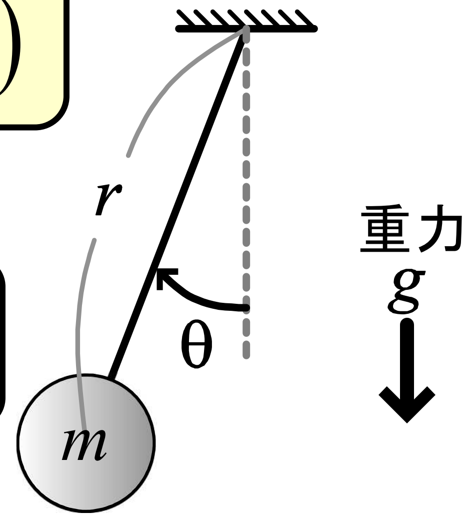
$$U=mg\left(r-r\cos\theta\right)$$

全エネルギー

$$V=K+U$$

運動方程式

$$mr^2\ddot{\theta}+mgr\sin\theta=0$$



エネルギーの時間変化

$$\dot{V}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\left(r\dot{\theta}\right)^2+mg\left(r-r\cos\theta\right)\right)$$

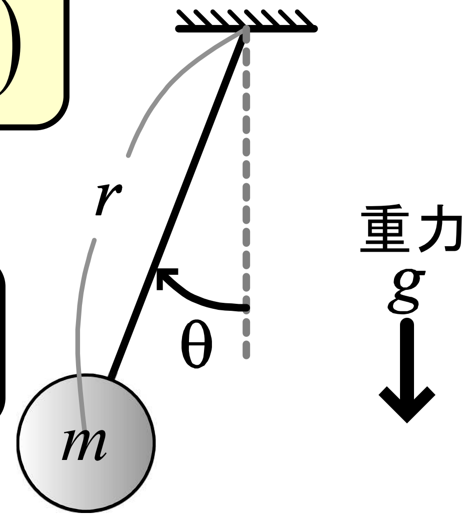
解答

運動エネルギー

$$K = \frac{1}{2} m \left(r\dot{\theta} \right)^2$$

ポテンシャルエネルギー

$$U = mg\left(r - r\cos\theta \right)$$



全エネルギー

$$V = K + U$$

運動方程式

$$mr^2\ddot{\theta} + mgr\sin\theta = 0$$

エネルギーの時間変化

$$\dot{V} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2} m \left(r\dot{\theta} \right)^2 + mg\left(r - r\cos\theta \right) \right) = mr^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgr\dot{\theta}\sin\theta$$

$$= \dot{\theta}\left(mr^2\ddot{\theta} + mgr\sin\theta \right) = 0$$

今週の内容

- 仮想仕事の原理の概要
- 仮想仕事の原理の適用例
- 演習

仮想仕事の原理の概要

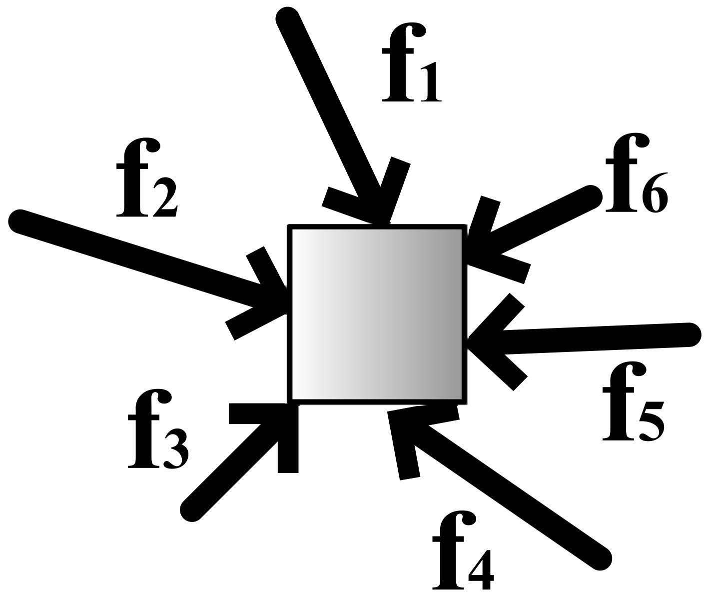
•静力学の概念

•「釣り合い」の概念を一般化したもの

•スカラー値の仕事で解析することで、
複雑な系でも統一的に釣り合いを解析

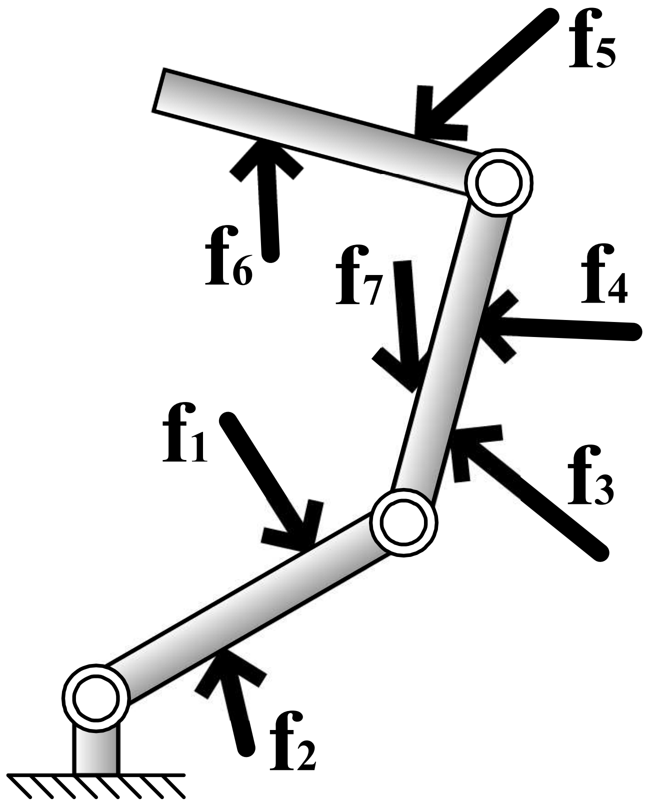
質点における釣り合い

質点に働いている力 $\mathbf{f_i}$ の合計 $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{f_i}$ が0のとき、系は釣り合いの状態にある



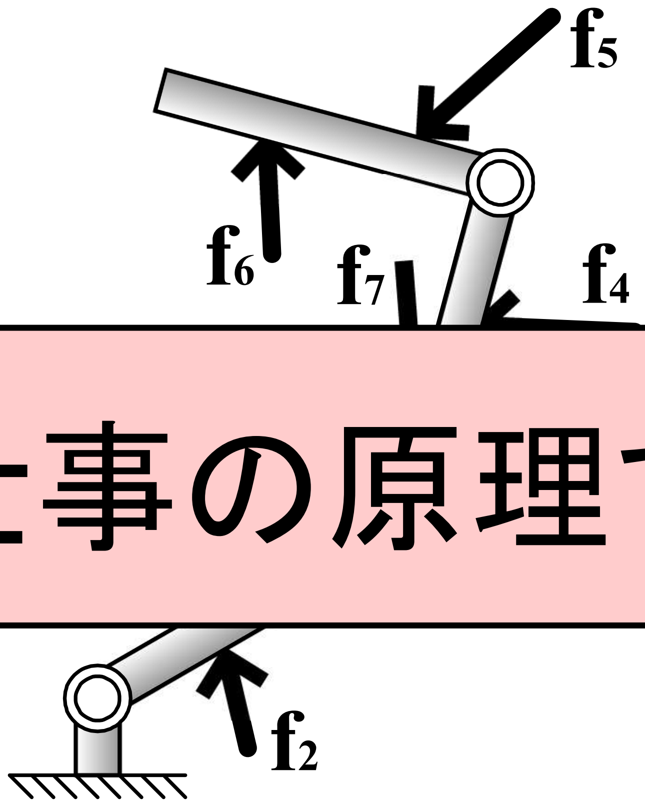
釣り合いの一般化

では、複雑な系での釣り合いは？



釣り合いの一般化

では、複雑な系での釣り合いは？



仮想仕事の原理で解析

仮想仕事の原理

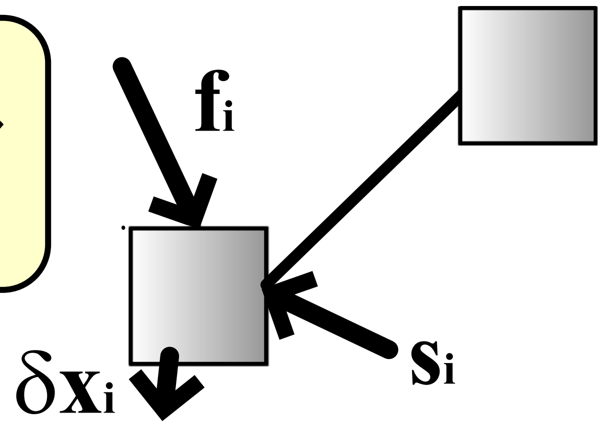
系が釣り合いの状態にあるとき、

系に作用する力がする仮想仕事の

合計は0である（逆も真）

仮想仕事の原理の数学的表現

質点iに拘束力 $\mathbf{s}_\mathrm{i}$ と外力 $\mathbf{f}_\mathrm{i}$ が作用し、
それらの合力 $\mathbf{s}_\mathrm{i}+\mathbf{f}_\mathrm{i}$ が 0 の場合



仮想仕事 δW

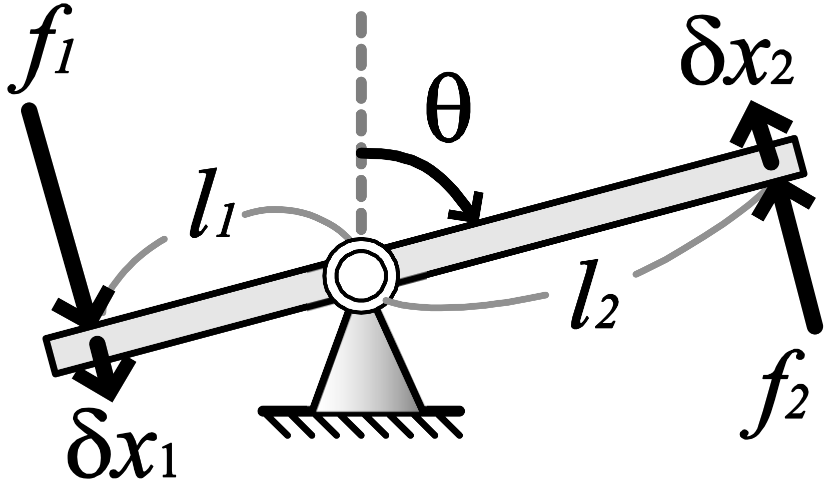
$$\delta W=\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{s}_\mathrm{i}+\mathbf{f}_\mathrm{i}\right)\cdot\delta\mathbf{x}_\mathrm{i}=0$$

$\delta\,\mathbf{x}_\mathrm{i}$: 各質点の仮想変位
(拘束に矛盾しない微小変位)

拘束力は仕事をしない $\sum_{i=1}^{n}\mathbf{s}_\mathrm{i}\cdot\delta\mathbf{x}_\mathrm{i}=0$

よって、$\delta W=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{f}_\mathrm{i}\cdot\delta\mathbf{x}_\mathrm{i}=0$ であれば系全体は釣り合う

仮想仕事の原理の適用例



各仮想変位の関係

$$\delta\theta = -l_1\delta x_1 = -l_2\delta x_2$$

釣り合いの条件

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{f_i} \cdot \delta\mathbf{x_i} = f_1\delta x_1 + f_2\delta x_2 = -\left(f_1 l_1 + f_2 l_2\right)\delta\theta = 0$$

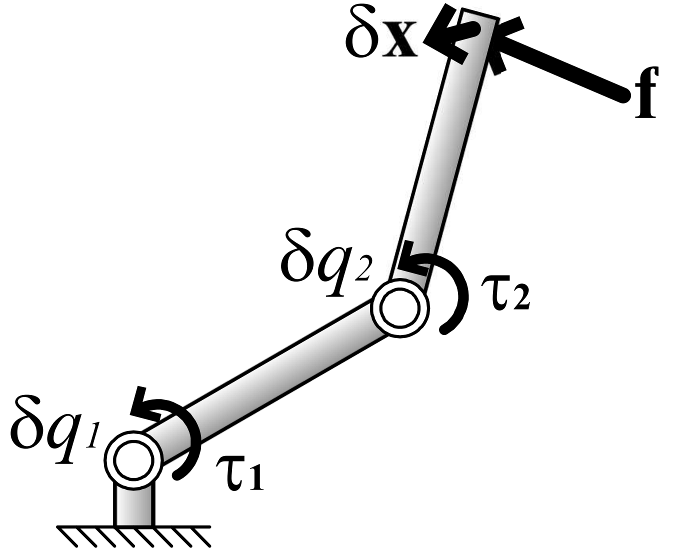
よって、$f_1 l_1 = -f_2 l_2$ のとき系は釣り合う

リンク構造の仮想仕事の原理

各仮想変位の関係

$$\delta\mathbf{x} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\delta\mathbf{q}$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial q_1} & \dfrac{\partial y}{\partial q_2} \\ \dfrac{\partial x}{\partial q_1} & \dfrac{\partial y}{\partial q_2} \end{pmatrix}$$ ：ヤコビ行列



釣り合いの条件

回転系の場合は
（トルク）・（角度変位）で仕事

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{f}_\mathbf{i} \cdot \delta\mathbf{x}_\mathbf{i} = \mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{x} + \boldsymbol{\tau} \cdot \delta\mathbf{q} = \left(\mathbf{J}^T\mathbf{f} + \boldsymbol{\tau}\right) \cdot \delta\mathbf{q} = 0$$

よって、$\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{J}^T\mathbf{f}$ のとき系は釣り合う

ヤコビ行列

手先速度と関節速度、
手先力と関節トルクの関係を表す行列

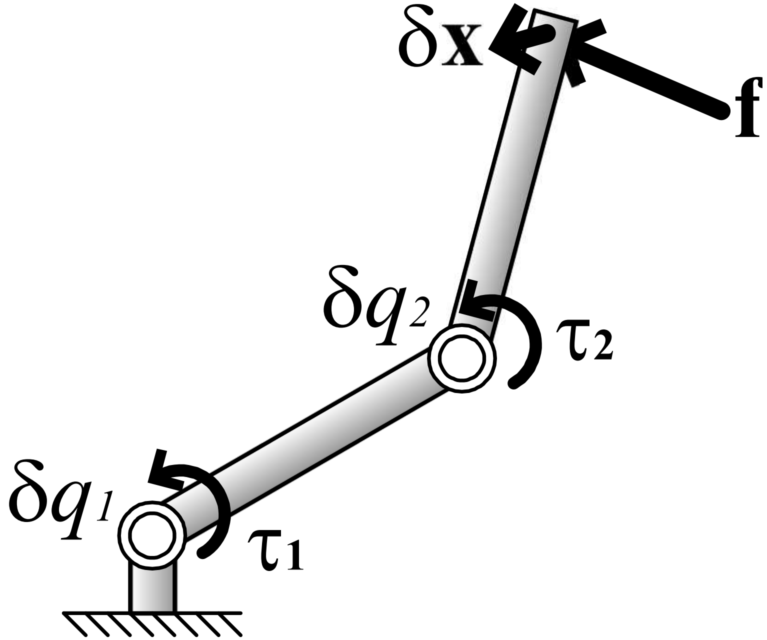
手先速度と関節速度の関係

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} \end{pmatrix}$$ ：ヤコビ行列

手先力・関節トルクの関係

$$\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{J}^T\mathbf{f}$$



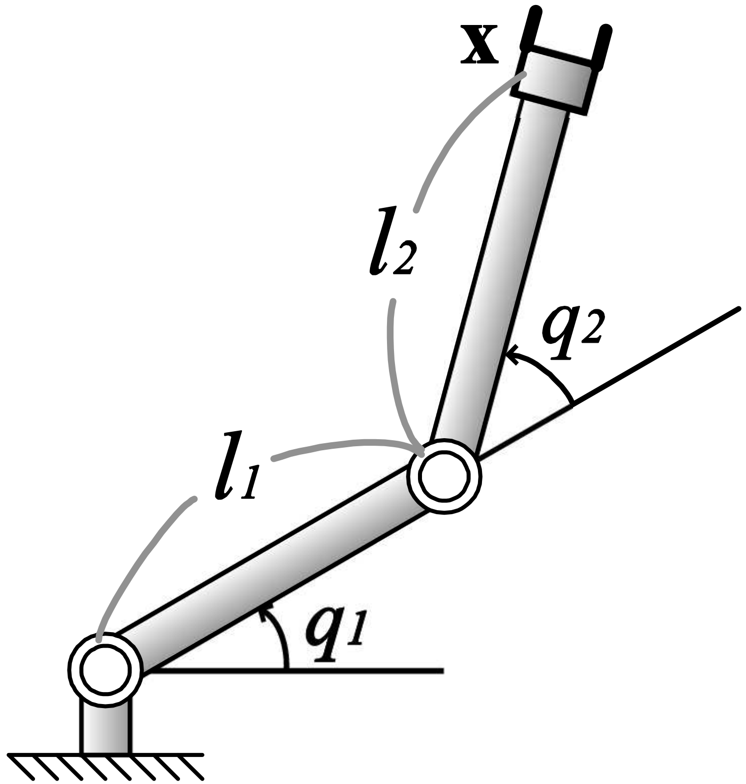
演習

下図の関節角q_1,q_2と手先位置$\mathbf{x}$の関係を導出せよ

また、ヤコビ行列を導出せよ

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

$\mathbf{J}(\mathbf{q})$：ヤコビ行列



解答

手先位置 $\mathbf{x}$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2) \end{pmatrix}$$

手先速度 $\dot{\mathbf{x}}$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -\dot{q}_1 l_1 \sin q_1 - (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ \dot{q}_1 l_1 \cos q_1 + (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) l_2 \cos(q_1 + q_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -l_1 \sin q_1 - l_2 \sin(q_1 + q_2) & -l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) & l_2 \cos(q_1 + q_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \mathbf{J} = \begin{pmatrix} -l_1 \sin q_1 - l_2 \sin(q_1 + q_2) & -l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) & l_2 \cos(q_1 + q_2) \end{pmatrix}$$

演習

レジュメP.31の問題4.1～4.5